# משפט

אם לכל וf אינט' על אזי   
אם לכל וf אינט' על אזי

# משפט

אם f רציפה ב ו שם וf אינה שווה אפס באופן זהותי(ז"א קיים כך ש, אזי

## הערה

זה לא נכון אם f אינה רציפה. למשל מקיימת תנאי המשפט חוץ מרציפות אבל

## הוכחה

כיוון שf רציפה ו קיים כך ש וגם עבור כל , לכן . אבל:

# משפט

אם f אינט' על אז גם אינט' שם ומתקיים .

## הערה

יש פונקציות כך שf אינה אינט' על אבל אינט' שם. דוגמה:

## הוכחה

כיוון שf אינט', f חסומה וגם באשר – תנודה של f ב. ברור ש חסומה גם כן.

ראינו בשיעור קודם שאם , f,g אינט' אזי

לכל מתקיים . לכן

## מסקנה

תהי f אינט' על ונניח ש לכל . אזי  
אפשר לכתוב את זה בצורה שונה:

# משפט(הערך הממוצע האינטגרלי)

תהי f פונקציה רציפה ב וg פונקציה אינט' שם, השומרת על סימן קבוע בקטע. אזי קיים כך ש

## הוכחה

אפשר להניח ש לכל . נגדיר . אזי לכל ולכןאם אזי ואין מה להוכיח. נניח איפה ש. אזי  
לפי משפט ערך הביניים קיים כך ש, וסיימנו.

## מסקנה

אם f רציפה ב, אזי קיים כך ש

### הוכחה

קח במשפט.

# למה

אם f אינט' על , אזי הפונקציה הינה רציפה ב

## הוכחה

נקבלע וקח h כך ש.  
כיוון שf אינט' היא חסומה, ז"א קיים כך ש לכל ואז , לכן , ז"א F רציפה בx

# משפט(נוסחת בונה Bonnet)

תהי f מונוטונית ב וg פונקציה אינט' השומרת על סימן קבוע בקטע. אזי קיים כך ש

## הוכחה

אפשר להניח שf לא יורדת ו. נתבונן ב. ברור שF רציפה. בנוסף לכך (שכן ). מכאן  
*לכן ע"פ משפט ערך הביניים קיים כך ש*

# משפט

תהי f אינט' על . בכל נקודה x בה f רציפה הפונקציה גזירה ומתקיים

## הוכחה

נקבע כך שf רציפה ב. יהי . קיים כך שאם ו אזי . כך כך .

# משפט("המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי")

לכל פונקציה רציפה f ב קיימת פוקנציה פרימיטיבית, דהיינו

# משפט(גירסה נוספת ל"משפט היסודי של החשבון האינטגרלי")

תהי f רציפה ב ותהי G פונקציה פרימיטיבית של f ב. אזי

## הוכחה

כיוון שG הינה פונקציה פרימיטיבית לf על , לכל . ע"פ המשפט קודם באשר לכן

# משפט(המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי)

תהי f אינט' על . תהי F פונקציה רציפה ב, גזירה ב פרט אולי למספר סופי של נקודות והמקיימת פרט אולי למספר סופי של נקודות. אזי

## הוכחה

תהי T חלוקה של , כך שכל הנקודות ה"לא טובות" מופיעות בT. לכל קטע , F רציפה וגזירה בקטע הפתוח ע"פ הבחירה של הנקודות, ומתקיים עבור . לפי משפט לגרנז' קיים כך  
ש. מכאן:

# משפט

תהי f רציפה ב ותהי פונקציה בעלת נגזרת רציפה ב המקיימת לכל , . אזי   
 באשר לכל  *באשר לכל   
נתבונן ב*